Tema 1: CÀLCUL

1. NOMBRES ENTERS

Z = { 0, 1, -1, 2, -2, ... }. Es representen en una recta

Operacions

a) Suma i resta
- agrupem els nombres positius per una banda i els negatius per altre;
- sumem cada grup de nombres;
- restem els resultats obtinguts i posem el signe del més gran

Ex: $3 - 5 - 8 + 9 - 1 =$
$= 3 + 9 - 5 - 8 - 1 =$
$= 12 \quad - 14 =$
$= - 2$

b) Producte i divisió
- es multipliquen o es dividiexen els nombres
- el resultat és: + si els nombres tenen el mateix signe, i - si tenen diferent signe

Ex : $(-2) \cdot (-3) = + 6$
$6 : (-2) = - 3$

OJO: Això només és cert quan es treballa en grups de nombres de dos en dos.
Ex: $(-2) \cdot (-4) \cdot (- 3) = - 24$

Propietat distributiva : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ex :

$4 \cdot (5 + 3)$	=	$4 \cdot 5 + 4 . 3$
$4 \cdot \quad 8$	=	$20 + 12$
32	=	32
donem prioritat al parèntesi		apliquem la propietat distributiva i repartim el producte abans de sumar

Treure factor comú: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
Consisteix en aplicar a l'inrevès la propietat distributiva. Tal i com el seu nom indica
treure farem fora
factor un(s) nombre(s) que està(n) multiplicant i
comú que es troba a tots els termes de la suma o resta

Ex $_1$: $2 \cdot 5 + 2 \cdot 12 - 2 \cdot 8 = 2 \cdot (5 + 12 - 16)$
Ex $_2$: $4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 = 4 \cdot (6 - 3 + 1)$

ÒJÓ: Quan en un terme sembla no quedar res hem de posar un 1 ja que, per exemple, $3 = 3 \cdot 1$. En el exemple anterior: $4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 =$
$4 \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 =$
$4 \cdot (6 - 3 + 1)$

Prioritat d'operacions
1er. Fem potències i arrels
2on fem les multiplicacions i divisions
3r fem les sumes i restes

Ex : $3 + 4 \cdot 2 - 8 : 2 =$
$= 3 + 8 - 4 =$
$= 11 - 4 = 7$

En el cas d'haver parèntesi: fem les operacions de dins del parèntesi fent servir l'ordre d'abans fins tenir un resultat i desprès les operacions que resten.

ÒJÓ: quan davant d'un parèntesi no hi ha cap signe de suma, resta, producte, o divisió, es multiplica el resultat obtingut pel nombre que hi ha justament abans.

Ex : $2 (5 + 3 \cdot 4) - 5 - 4 : 2 =$
$= 2 (5 + 12) - 5 - 4 : 2 =$
$= 2 (17) - 5 - 4 : 2 =$
$= 34 - 5 - 2 = 27$

Podem trobar-nos amb que dins d'un parèntesi tenim un altre, a les hores la resolució es fa de dins a fora, es a dir, primer es resol el parèntesi més interior.

Ex : $2 (4 + 5 (6 : 3 + 4 - 3) - 1) =$
$= 2 (4 + 5 (2 + 4 - 3) - 1) =$
$= 2 (4 + 5 \cdot 3 - 1) =$
$= 2 (4 + 15 - 1) =$
$= 2 \cdot 18 = 36$

2. NOMBRES RACIONALS

L'expressió $\frac{a}{b}$ s'anomena fracció. A *a* numerador, i a *b* denominador.

Representació gràfica

Per representar graficament una fracció en una recta,

a) dividim cada unitat en tantes parts iguals com indica el denominador, començant del 0 a la dreta si el nombre és positiu, i del 0 cap a l'esquerra en el cas de nombre negatiu.

b) començant des de 0 agafem tantes parts com indica el numerador.

Fraccions equivalents. Representen la mateixa quantitat. Per saber si dues fraccions són equivalents:

a) fem la divisió entre numerador i denominador, i si dona el mateix valor són equivalents;

b) multipliquem el numerador d'una fracció pel denominador de l'altre, i al inrevès. Si són equivalents donarà el mateix resultat.

Ex: 5/4 i 20/16	5: 4 = 1,2	5·16 = 80	
	20:16 = 1,2	20·4 = 80	Si

Per obtenir fraccions equivalents a una donada, multipliquem o dividim, numerador i denominador, pel mateix nombre.

Ex:

$$\frac{12}{20} \rightarrow \frac{3}{5} \ (:4) \qquad\qquad \frac{12}{20} \rightarrow \frac{36}{60} \ (\cdot 3)$$

Operacions

a) Suma i resta.

- Posem com a nou denominador el m.c.m dels denominadors.
- Multipliquem els numeradors pel resultat de la divisió: numerador nou / numerador vell
- Sumem i/o restem els numeradors mantenint el denominador.

Ex:

$$\frac{3}{4} + 2 - \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot \overset{20:4}{5}}{20} + \frac{2 \cdot \overset{20:1}{20}}{20} - \frac{1 \cdot \overset{20:5}{4}}{20} = \frac{15}{20} + \frac{40}{20} - \frac{4}{20} = \frac{51}{20}$$

$$\text{m.c.m} = 2^2 \cdot 5 = 20$$

b) Producte: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\ c}{b\ d}$ Ex: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$

c) Divisió: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\ d}{b\ c}$ Ex: $\frac{3}{2} : \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{9} = \frac{18}{18}$

<u>Simplificació de fraccions</u>

a) Dividim numerador i denominador per divisors comuns.

Ex:

$$\frac{240}{128} \overset{:4}{=} \frac{60}{32} \overset{:2}{=} \frac{30}{16} \overset{::2}{=} \frac{15}{8}$$

b) Descomposem factorialment numerador i denominador, eliminant els factors que es repeteixen a dalt i a baix.

Ex:

$$\frac{3246}{5184} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot67}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{67}{108}$$

La fracció obtinguda no es pot simplificar més, s'anomena <u>fracció irreductible</u>.

3. POTÈNCIES

Potències. Consisteix en multiplicar factors iguals: $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{"b" vegades}}$

on a – base i b – exponent. Ex: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Propietats:

1. $\mathbf{a^1 = a}$ Ex: $5^1 = 5$

2. $\mathbf{a^0 = 1}$ Ex: $(-2)^0 = 1$

3. Operacions.

En general, per fer operacions amb potències, es calculen aquestes i es fan les operacions indicades.

Ex: $3^2 + 5^2 - 2^3 = 9 + 25 - 8 = 26$

Ex: $2^5 \cdot 5^3 = 32 \cdot 125$

Hi han casos especials on es poden fer alguns pasos que simplifiquen la feina, es tracta de **producte i divisió de potències amb la mateixa base**

$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ Ex: $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$ Ex: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

3. Potència d'un producte o d'una divisió:

$\mathbf{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}$

Ex:

$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$

$12^2 = 9 \cdot 16$

$144 = 144$

$\mathbf{(a : b)^m = a^m : b^m}$

$(36:4)^2 = 36^2 : 4^2$

$9^2 = 1296 : 16$

$81 = 81$

5. $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ Ex: $(2^3)^2 = 2^6$

6. $\mathbf{a^{-m} = 1 / a^m}$ Ex : $2^{-3} = 1 / 2^3$

Notació científica

Consisteix en fer servir potències de 10 per expressar quantitats molt grans o molt petites.

Observacions

a)

$10^{\text{nº positiu}}$ unitat seguida de tants zeros com indica el nombre

Ex:

$10^3 = 1000$
$10^{12} = 1000\ 000\ 000\ 000$

$10^{\text{nº negatiu}}$ pensem en les propietats de les potències

Ex :

$10^{-2} = 1 / 10^2 = 1 / 100 = 0{,}01$
$10^{-15} = 1 / 10^{15} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 001$

b)

$3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10\ 000 = 30\ 000$
$2{,}5 \cdot 10^{12} = 2\ 500\ 000\ 000\ 000$

$4 \cdot 10^{-2} = 0{,}04$
$3{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}\ 35$

c) Un nombre es pot expressar de moltes formes

$$2{,}38 \cdot 10^{12} = 23{,}8 \cdot 10^{11} = 0{,}238 \cdot 10^{13}$$

d) Operacions

- Sumes i restes

Expressem totes les quantitats amb una mateixa potència
Treiem factor comú
Sumem i/ o restem

Ex :

$$\begin{aligned} &3{,}4 \cdot 10^{15} - 2 \cdot 10^{14} = \\ &= 3{,}4 \cdot 10^{15} - 0{,}2 \cdot 10^{15} = \\ &= (\ 3{,}4 - 0{,}2\ ) \cdot 10^{15} = \\ &= 3{,}2 \cdot 10^{15} \end{aligned}$$

- Producte i divisió

Ex :

$$\begin{aligned} &2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^3 = \\ &= 2{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 = \\ &= 12{,}5 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

4. **ARRELS**

Arrel. És l'operació inversa d'elevar a una potència

$\sqrt[n]{a} = b \qquad b^n = a \qquad a$ = radicand

n = índex

Ex:

$\sqrt{81} = \pm 9$ ja que $9^2 = 81$

$(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ ja que $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

$\sqrt[5]{-32} = -2$ ja que $(-2)^5 = -32$

Propietats:

1. Signe de l'arrel

Index Radicand	Nº parell	Nº senar
Positiu	±	+
Negatiu	no existeix	-

2. Operacions

a)Suma i resta. Primer hem de calcular l'arrel i desprès fer l'operació.

Ex: $\sqrt{64} + \sqrt{4} - \sqrt{100} = 8 + 2 - 10 = 0$

b)Producte i divisió.

En general, primer farem l'arrel i desprès el producte o la divisió.

Ex:

$\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{-64} = 3 \cdot (-4) = -12$

Si les arrels que es multipliquen o es divideixen tenen el mateix índex, podem primer multiplicar o dividir, i desprès fer l'arrel

Ex: $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4}$

$5 \cdot 2 = \sqrt{100}$

$10 = 10$

c) Potència d'una arrel $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{b} = \sqrt[n]{a^b}$. Ex: $(\sqrt{4})^3 = \sqrt{4^3}$

$$2^3 = \sqrt{64}$$
$$8 = 8$$

d) Arrel d'una arrel $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$. Ex: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \pm\ 2$

3. $\sqrt[n]{a^n} = a$. Ex: $\sqrt{4^2} = 4$

4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Ex: $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$

Càlcul d'arrels. A part de les més inmediates com $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{-8}$, etc. podem calcular arrels de nombres grans.

a) Factoritzem el radicand;
b) Expressem els exponents com a suma de tants índexs com sigui possible;
c) Separem l'arrel com a producte d'arrels
d) Simplifiquem

Ex:

$$\sqrt{576} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} = \sqrt{2^{2+2+2} \cdot 3^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} =$$
$$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Ex:

$$\sqrt[3]{-192} = - \sqrt[3]{2^6 \cdot 3} = - \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} = - 4 \cdot \sqrt[3]{3}$$

Racionalització

Consisteix en trobar una fracció equivalent a la donada però sense arrels al denominador.

a) Si no hi ha sumes o restes al denominador, multipliquem numerador i denominador per l'arrel convenient

Ex:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^3} \cdot \sqrt[5]{4^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{4^2}}{4}$$

b) Si hi ha suma o resta al denominador, multipliquem numerador i denominador pel conjugat

Ex:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$